Método Axiomático e Teorias Formais

#07

Relembrando...

Uma linguagem de 1ª ordem $\mathcal{L}$ possui os seguintes símbolos:

a) Conectivos proposicionais $\neg$ e $\rightarrow$; quantificador universal $\forall$;
b) Símbolos auxiliares:), (, ,
c) Uma coleção enumerável de variáveis individuais $x_1, x_2, \ldots$
d) Um conjunto finito ou enumerável (possivelmente vazio) de constantes individuais $a_1, a_2, \ldots$
e) Um conjunto não vazio de letras predicativas $A_1^1, A_1^2, \ldots, A_2^1, A_2^2, \ldots$
f) Um conjunto finito ou enumerável (possivelmente vazio) de letras funcionais $f_1^1, f_1^2, \ldots, f_2^1, f_2^2, \ldots$

Fórmulas bem formadas – Passo 1: Termos

Definição 1 – Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem. Os termos de $\mathcal{L}$ são definidos recursivamente como:

a) Variáveis individuais e constantes individuais são termos.
b) Se f_i^n é uma letra funcional e $t_1, \dots, t_n$ são termos, então $f_i^n(t_1, \dots, t_n)$ é um termo.

Exemplo:

- $x_1 + x_2$ pode ser expressa como $f_1^2(x_1, x_2)$.

Fórmulas bem formadas – Passo 2: Fórmulas Atômicas

Definição 2 – Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem. Se $t_1, \ldots, t_n$ são termos e A_i^n é uma letra predicativa, então $A_i^n(t_1, \ldots, t_n)$ é uma fórmula atômica.

Exemplo:

$$x_1 + 1 \leq x_1 * x_2$$

$$f_1^2(x_1, a_1) \leq f_2^2(x_1, x_2)$$

$$A_1^2\left(f_1^2(x_1, a_1), f_2^2(x_1, x_2)\right)$$

Fórmulas bem formadas – Passo 3

Definição 3 – Uma fórmula bem formada (ou simplesmente fórmula) de uma linguagem de primeira ordem é definida recursivamente como:

a) Toda fórmula atômica é uma fórmula bem formada.
b) Se A e B são fórmulas bem formadas, então $(\neg A)$ e $(A \rightarrow B)$ são fórmulas bem formadas.
c) Se A é uma fórmula bem formada e x uma variável individual, então $(\forall x)A$ é uma fórmula bem formada.

Exemplo

Considere a expressão $(\forall x_1)A_1^2(f_1^2(x_1, a_1), x_1)$.

- a_1 é um termo (pela definição 1).
- x_1 é um termo (pela definição 1).
- Logo, $f_1^2(x_1, a_1)$ é um termo (pela definição 1).
- Se $f_1^2(x_1, a_1)$ e x_1 são termos, $A_1^2(f_1^2(x_1, a_1), x_1)$ é uma fórmula atômica (pela definição 2).
- Portanto, $(\forall x_1)A_1^2(f_1^2(x_1, a_1), x_1)$ é uma fórmula bem formada (pela definição 3).

Escopo de quantificadores

Considere uma fórmula do tipo $(\forall x)B$. Dizemos que B é o *escopo* do quantificador $(\forall x)$. Alguns exemplos:

- $(\forall x_1)A_1^2(f_1^2(x_1, a_1), x_1))$
  - O escopo de $(\forall x_1)$ é $A_1^2(f_1^2(x_1, a_1), x_1))$

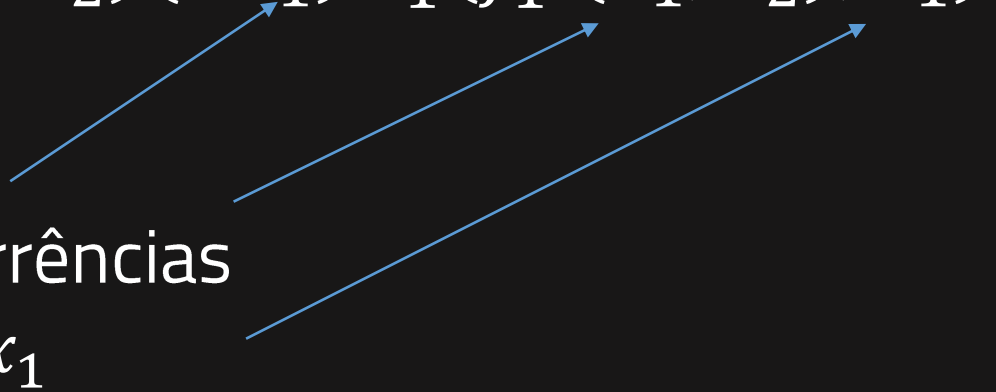
- $(\forall x_2)(\forall x_1)A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_1)$
  - O escopo de $(\forall x_1)$ é $A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_1)$
  - O escopo de $(\forall x_2)$ é $(\forall x_1)A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_1)$

Variáveis livres/ligadas

Uma ocorrência de uma variável é quando uma variável individual aparece em uma fórmula.

Exemplo:

$$(\forall x_2)(\forall x_1)A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_1)$$



Há três ocorrências da variável x_1

Variáveis livres/ligadas

Uma ocorrência de uma variável é quando uma variável individual aparece em uma fórmula.

Exemplo:

$$(\forall x_2)(\forall x_1)A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_1)$$

Há três ocorrências da variável x_1

Há duas ocorrências da variável x_2

Variáveis livres/ligadas

Uma ocorrência de uma variável x é dita *ligada* em uma fórmula B quando essa variável ocorre:

- Em um quantificador $(\forall x)$ cujo escopo é B;
- Na própria fórmula B, que é escopo de $(\forall x)$.

Caso contrário, esta ocorrência é dita *livre*.

Variáveis livres/ligadas

Considere a fórmula

$$(\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow (\forall x_1)A_1^1(x_1)$$

- Variáveis: x_1, x_2.
- x_1 ocorre três vezes, x_2 ocorre duas vezes.
- O escopo de $(\forall x_2)$ é $A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow (\forall x_1)A_1^1(x_1)$
- O escopo de $(\forall x_1)$ é $A_1^1(x_1)$.
- Todas as ocorrências de x_2 são ligadas.
- A primeira ocorrência de x_1 é livre; as demais, ligadas.

Termos livres/ligados para Variáveis

Considere a fórmula

$$(\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow (\forall x_1)A_1^1(x_1)$$

- O termo $f_1^2(x_1, x_3)$ é livre para x_1:

$$(\forall x_2)A_1^2(f_1^2(x_1, x_3), x_2) \rightarrow (\forall x_1)A_1^1(x_1)$$

pois não introduz ocorrência de variável ligada.

Termos livres/ligados para Variáveis

Considere a fórmula

$$(\exists x_3)(\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow (\forall x_1)A_1^1(x_1)$$

- O termo $f_1^2(x_1, x_3)$ **não** é livre para x_1:

$$(\exists x_3)(\forall x_2)A_1^2(f_1^2(x_1, x_3), x_2) \rightarrow (\forall x_1)A_1^1(x_1)$$

pois introduziu uma ocorrência de variável ligada, a saber, x_3.

Observação final

Uma fórmula cujas variáveis individuais são todas ligadas é chamada de fórmula fechada.

Número Imaginário

numeroimaginario.com.br